# Composition des applications

**Définition :** Soient $E, F, G$ trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On note

$$g\circ f : E \to G \qquad (g \text{ rond } f)$$
$$x \mapsto g\circ f(x) := g(f(x))$$

l'application composée de $f$ et $g$.

## Propriétés de la composition

- Soit $f : E \to F$. Alors $f \circ \mathrm{id}_E = f = \mathrm{id}_F \circ f$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[loop below, "\mathrm{id}_E"] & F \arrow[loop below, "\mathrm{id}_F"] \end{tikzcd}$$

- Associativité : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$.

Alors $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f =: h\circ g\circ f$.

Preuve $h\circ(g\circ f)(x) = h(g\circ f(x)) = h(g(f(x)))$

$(h\circ g)\circ f(x) = (h\circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$ . $\square$

**Exemple :** 1) Soit $f : E \to F$, $\quad pr_1 : E\times F \to E$, $(x,y) \mapsto x$ $\quad pr_2 : E\times F \to F$, $(x,y)\mapsto y$.

$\sigma_f : E \to E\times F$, $x \mapsto (x, f(x))$ $\quad$ Alors $pr_1\circ\sigma_f = \mathrm{id}_E$ ; $pr_2 \circ \sigma_f = f$.

$pr_1\circ\sigma_f(x) = pr_1(\sigma_f(x)) = pr_1(x, f(x)) = x = \mathrm{id}_E(x)$.

$pr_2\circ\sigma_f(x) = pr_2(\sigma_f(x)) = pr_2(x, f(x)) = f(x)$.

2) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$, $\quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $m \mapsto \frac{m}{2}$

On a $g|_{2\mathbb{N}}(2n) = n \in \mathbb{N}$. On peut considérer $g|_{2\mathbb{N}} : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$\rightsquigarrow \underbrace{g|_{2\mathbb{N}} \circ f}_{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto g|_{2\mathbb{N}}\circ f(n) = n$ $\qquad f\circ g|_{2\mathbb{N}} = \mathrm{id}_{2\mathbb{N}}$

$f(g(2n)) = f(n) = 2n = \mathrm{id}_{2\mathbb{N}}(2n)$

Ensemble des applications :

Soient $E, F$ deux ensembles. La famille des fonctions $\{ f : E \to F \}$ forment un ensemble, noté $\mathcal{F}(E,F)$ ou $F^E$.

La composition $\circ$ peut être vue comme fonction :

$$\circ : \mathcal{F}(E,F) \times \mathcal{F}(F,G) \longrightarrow \mathcal{F}(E,G)$$
$$(f\ ,\ g) \longmapsto g \circ f .$$

Image directe et image réciproque.

Définition (Image directe) Soit $f : E \to F$ une application, et $A \subseteq E$ un sous-ensemble. L'<u>image directe</u> de $A$ par $f$ est le sous-ensemble de $F$ :

$$f(A) = \{ y \in F \mid \exists x \in A,\ f(x) = y \} = \{ f(x) \mid x \in A \} \subseteq F.$$

L'image $f(E)$ de l'ensemble $E$ tout entier est parfois notée $\mathrm{Im}(f)$ (l'image de l'application $f$).

Propriété de l'image directe : Soit $f : E \to F$, $A, B \subseteq E$.

1 - $f(\emptyset) = \emptyset$

2 - Si $A \subseteq B \subseteq E$, $\Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$

3 - $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

4 - $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

5 - $g \circ f(A) = g(f(A))$

2) $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A : f(x) = y$.

Car $x \in A$, $A \subseteq B \Rightarrow x \in B$. $\Rightarrow f(x) = y$, $x \in B$.

donc $y \in f(B)$.

Preuve : 4) $\subseteq$ $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists x \in A \cup B$ tq $f(x) = y$.

Si $x \in A \Rightarrow y = f(x), x \in A \Rightarrow y \in f(A)$

Si $x \in B \Rightarrow$ —— $y \in f(B)$

$\Big\} \Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$

2) Suppose $y \in f(A) \cup f(B)$.

Si $y \in f(A) \Rightarrow y \in f(A \cup B)$ (prop. 2), car $A \subseteq A \cup B$)

Si $y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A \cup B)$ (prop. 2)

OK.

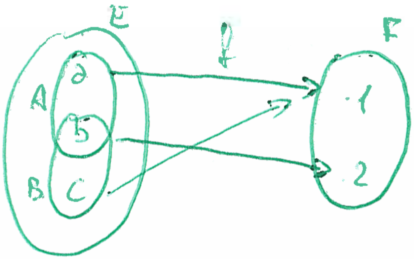
3) Supposons $y \in f(A \cap B) \Rightarrow \exists x \in A \cap B : y = f(x)$.

$\Rightarrow x \in A \cap B \subseteq A$, $y = f(x) \Rightarrow y \in f(A)$

$x \in A \cap B \subseteq B$, $y = f(x) \Rightarrow y \in f(B)$

$\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$

C Ex :




$f(A \cap B) = f(\{b\}) = \{2\}$

$f(A) = \{1,2\}$ $\Rightarrow f(A) \cap f(B) = \{1,2\}$ $\neq$

$f(B) = \{1,2\}$

**Définition** ~~image~~ (image réciproque). Soit $f : E \to F$ une application, et $A \subseteq F$ une sous-ensemble. L'<u>image réciproque</u> de $A$ par $f$ est l'ensemble

$$f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\} \subseteq E.$$

Propriétés de l'image réciproque. Soient $f : E \to F$, $A, B \subseteq F$.

1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

2) $f^{-1}(F) = E$

3) Si $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$

4) $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$

5) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

6) $f^{-1}(B \setminus A) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$

7) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

8) $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$

9) $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$, $C \subseteq f^{-1}(f(C))$ $\forall C \subseteq E$.

Preuve : 3) Supposons $A \subseteq B$ et $x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$.

$\Rightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)$.

4) $f^{-1}(A^c) \overset{?}{=} (f^{-1}(A))^c$. $x \in f^{-1}(A^c) \Leftrightarrow f(x) \notin A$

$x \in (f^{-1}(A))^c \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \notin A$

$\Updownarrow$ Non $(f(x) \in A)$ OK

5) $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$

$x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in A$ et $f(x) \in B$ OK

6) $f^{-1}(B \setminus A) = f^{-1}(B \cap A^c) \overset{(5)}{=} f^{-1}(B) \cap f^{-1}(A^c) \overset{(4)}{=} f^{-1}(B) \cap (f^{-1}(A))^c =$

$= f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$. OK

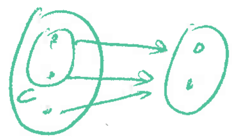
8) $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ : $y \in f(f^{-1}(A)) \Leftrightarrow \exists x \in f^{-1}(A) ; y = f(x)$.

$\Rightarrow \exists x ; f(x) \in A, y = f(x) \Rightarrow y = f(x) \in A$. OK.

Il suffit $f : E \to F$ t.q. $f(E) \subsetneq F$. $\Rightarrow f(f^{-1}(F)) = f(E) \subsetneq F$.

$C \subseteq f^{-1}(f(C))$ : $x \in C \overset{?}{\Rightarrow} x \in f^{-1}(f(C)) \Leftrightarrow f(x) \in f(C)$.

$f(x) \in f(C) \Leftrightarrow \exists c \in C$ tq $f(x) = f(c)$. Mais $x = c$ ~~est le~~ satisfait la condition.

Si $C \subsetneq E$ t.q. $f(C) = F$  $\Rightarrow f^{-1}(f(C)) = f^{-1}(F) = E$

$C \subsetneq E$. OK

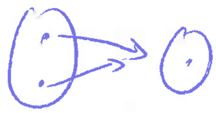
Remarque : Soit $f : E \to F$ une application. Si $a, b \in F$, $a \neq b$.

Alors $f^{-1}(\{a\}) \cap f^{-1}(\{b\}) \overset{(5)}{=} f^{-1}(\{a\} \cap \{b\}) = f^{-1}(\emptyset) \overset{(1)}{=} \emptyset$.

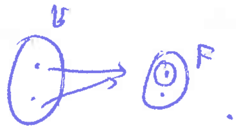
De plus, $E = \bigsqcup_{a \in F} f^{-1}(\{a\})$ : $\bigcup_{a \in F} f^{-1}(\{a\}) = f^{-1}\left(\bigcup_{a \in F} \{a\}\right) = f^{-1}(F) = E$.

Donc la famille $\{ f^{-1}(\{a\}))_{a \in F}$ forme une <u>partition</u> de $E$.

Notons que $f(\{x\}) = f(\{y\})$ ssi $f(x) = f(y)$.



et $\bigcup_{x \in E} f(\{x\}) = f(E) \subseteq F$
↑ en général $\subsetneq$.




## Injection, surjection, bijection

Définition Soit $f : E \to F$ une application.

1) $f$ est une <u>injection</u> ssi :

$\forall a, b \in E,\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

$\Updownarrow$ (par contraposée)

$\forall a, b \in E,\ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.

2) $f$ est une surjection de $E$ sur $F$ ssi $f(E) = F$ :

$\forall y \in F\ \exists x \in E : y = f(x)$

3) $f$ est une bijection de $E$ sur $F$ si elle est à la fois injective et surjective :

$\forall y \in F,\ \underset{\text{existe un unique}}{\exists!}\ x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Exemples : 1) $Id_E : E \to E$ est une bijection :

$x \neq y \Rightarrow Id_E(x) \neq Id_E(y)$ ($Id_E$ injective)

$\forall x \in E$, $x = Id_E(x) \Rightarrow Id_E$ surjective.

2) $\forall A \subseteq E$, $i_A : A \to E$ $i_A = Id_E|_A$ est injective :

Si $\underset{x}{\underset{\shortparallel}{i_A(x)}} = \underset{y}{\underset{\shortparallel}{i_A(y)}} \Rightarrow x = y$.

$i_A$ est surjective $\Leftrightarrow A = E$

3) ~~Supposons $F \neq \emptyset$~~. La projection $pr_1 : E \times F \to E$ est surjective (si $F \neq \emptyset$)

4) : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est pas injective : $f(1) = f(-1)$.

n'est pas surjective : $f^{-1}(-1) = \emptyset$.

$f|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est injective, pas surjective ($f|_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$).

$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$ est une bijection.

5) Soient $\underset{\underset{0}{\neq}}{a}, b, c \in \mathbb{C}$. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto az^2 + bz + c$ est surjective, sans être injective.

En effet. $\forall w \in \mathbb{C}$, $\exists z_1, z_2$ solution de $az^2 + bz + c - w = 0$. (surjective)

Si $\Delta = b^2 - 4(c-w)a \neq 0 \Rightarrow z_1 \neq z_2 \Rightarrow$ pas injective

6) : $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $z \mapsto (\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$ est une bijection.

Théorème : Une application $f : E \to F$ est une bijection si et seulement si $\exists g : F \to E$ application telle que $g \circ f = Id_E$, $f \circ g = Id_F$. (*)

~~De plus~~ Si $f$ est une bijection, et $g_1, g_2 : F \to E$ ~~et comme ce~~ satisfaisant (*), alors $g_1 = g_2$ (La bijection réciproque est unique et notée $f^{-1} : F \to E$).

Propriétés : Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$

1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ $f$ injective
2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ $g$ surjective
3) $g$ injective, $h : E \to F$ t.q. $g \circ f = g \circ h$ $\Rightarrow$ $f = h$.
4) $f$ surjective, $h : F \to G$ t.q. $g \circ f = h \circ f$ $\Rightarrow$ $g = h$
5) $f, g$ injective $\Rightarrow$ $g \circ f$ injective
6) $f, g$ surjective $\Rightarrow$ $g \circ f$ surjective
7) $f, g$ bijectives $\Rightarrow$ $g \circ f$ bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

~~Proof~~ Preuve : 1) Supposons $\forall\, x \neq y$.

$g \circ f$ injective $\Rightarrow$ $g(f(x)) \neq g(f(y))$

$g$ fonction $\Rightarrow$ $f(x) \neq f(y)$.

$\Rightarrow$ $f$ injective.

2) $g \circ f$ surjective $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $g(f(E)) = G$.

$g(F) \supseteq g(f(E)) = G$. $\Rightarrow$ $g(F) \supseteq G$. $g$ est surjective.

3) ~~Soit $x \in E$~~. On veut montrer que $\forall x \in E$, $f(x) = h(x)$

Soit $x \in E$. $g(\underbrace{f(x)}_{y_1}) = g(\underbrace{h(x)}_{y_2})$.

$g$ injective $\Rightarrow$ $f(x) = h(x)$. □

$y_1 = y_2$

---

~~Théorème : Une application $f : E \to F$ est une bijection~~

Preuve (Théorème) : ($\Rightarrow$) $f$ bijection : $\forall y \in F$ $\exists! x \in E$ t.q. $y = f(x)$

On pose $g(y) = x$. $g$ est une fonction, et on a $g(f(x)) = x'$

avec $x'$ le seul élément de $E$ t.q. $f(x) = f(x')$.

par unicité d'un tel $x'$, $x = x'$. et $g(f(x)) = x = \mathrm{Id}_E(x)$

Pour tout $y \in F$, $f \circ g(y) = f(g(y))$.

$g(y) = x$, le seul élément de $E$ t.q. $f(x) = y$ donc $f(g(y)) = y = \mathrm{Id}_F(y)$

($\Leftarrow$) Supposons que $\exists g : F \to E$ t.q. $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

car $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ est injective, par (1) $f$ est injective

car $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ est surjective, par (2) $f$ est surjective.

Donc $f$ est bijective.

Unicité Supposons $\exists g_1, g_2 : F \to E$ t.q. $f \circ g_1 = f \circ g_2$.

$f$ est injective par hypothèse. Par (3) $g_1 = g_2$. □

Exemples : 1) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$ est bijective, de bijection réciproque $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

2) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* = ]0, +\infty[$ est une bijection, de bijection réciproque $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (fonction logarithme)
(log)

3) $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}$ est une bijection, de bijection réciproque $\tan^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \to ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

4) $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ est une bijection. Sa bijection réciproque est elle même ($f \circ f = \mathrm{Id}$, on dit que $f$ est une involution)

5) Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto az + b$ est une bijection, de bijection réciproque $g : w \mapsto \frac{w - b}{a}$.

En effet : $g \circ f(z) = g(az+b) = \frac{az+b-b}{a} = z$ $\quad f \circ g(w) = f\left(\frac{w-b}{a}\right) = w$. (TSVP)

# Transformations géométriques du plan

Considérons le plan cartésien, rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Nous utilisons les coordonnées cartésiennes d'un nombre complexe $z=x+iy$.

**Déf:** Soit $E$ un ensemble, $f: E\to E$ une application. On dit que $x\in E$ est <u>invariant</u> sous l'action de $f$ (ou <u>fixé</u> par $f$) si $f(x)=x$.
L'ensemble des points fixes par $f$ est noté $\mathrm{Fix}(f)=\{x\in E \mid x=f(x)\}$.

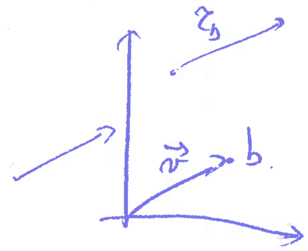
## Translations (Transformation Parabolique)

Soit $\vec{v}$ un vecteur dans le plan. La translation par $\vec{v}$ est la transformation qui associe à $P$ l'unique point $Q$ t.q. $\vec{PQ}=\vec{v}$.
Soit $b\in\mathbb{C}$ l'affixe de $\vec{v}$. La translation de $\vec{v}$ correspond à

$$\tau_b : \mathbb{C}\to\mathbb{C} \qquad z\mapsto z+b$$

- Si $b\neq 0$, $\mathrm{Fix}(\tau_b)=\emptyset$. Si $b=0$, $\tau_0=\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$, $\mathrm{Fix}(\tau_0)=\mathbb{C}$.
- $\tau_b$ est bijective, et $\tau_b^{-1}=\tau_{-b}$.
- $(O,\vec{i},\vec{j})$ est transformé en $(M,\vec{i},\vec{j})$, avec $\vec{OM}=\vec{v}$.

---




## Rotations: (Transformation elliptique)

Soit $P$ un point d'affixe $c\in\mathbb{C}$. La <u>rotation</u> du plan avec centre $P$ et angle $\alpha$ $(\in[0,2\pi))$ correspond à l'application

$$\rho_{c,\alpha} : \mathbb{C}\to\mathbb{C}, \quad z\mapsto e^{i\alpha}(z-c)+c = e^{i\alpha}z+(1-e^{i\alpha})c.$$

(with $\in\mathbb{R}$ written above $\alpha$)

$(O,\vec{i},\vec{j})$ est transformé en $(\underset{\rho_{c,\alpha}(0)}{M},\ \underset{\rho_{c,\alpha}(1)-\rho_{c,\alpha}(0)}{\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}}\ ;\ \underset{\rho_{c,\alpha}(i)-\rho_{c,\alpha}(0)}{-\sin\alpha\,\vec{i}+\cos\alpha\,\vec{j}})$

~~(image de 1 par f)~~

$\rho_{c,\alpha}(0)=c(1-e^{i\alpha})$

Si $\alpha \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ $\mathrm{Fix}(\rho_{c,\alpha}) = \{c\}$

si $\alpha \equiv 0 \pmod{2\pi}$, $\rho_{c,\alpha} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ $\quad \mathrm{Fix}(\rho_{c,0}) = \mathbb{C}$.

Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, $z \mapsto e^{i\alpha} z + a$ est une rotation de centre d'affixe $c = \dfrac{a}{1-e^{i\alpha}}$, d'angle $\alpha$,

Si $f(z) = e^{i\alpha} z + a$, $g(z) = e^{i\beta} z + b$,

$g \circ f(z) = e^{i\beta}(e^{i\alpha} z + a) + b = e^{i(\alpha+\beta)} z + a e^{i\beta} + b$, d'où

$\rho_{d,\beta} \circ \rho_{c,\alpha}$ est une rotation si $\alpha+\beta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$,

de ~~cent~~ angle $\alpha+\beta$ et centre $\dfrac{a e^{i\beta} + b}{1 - e^{i(\alpha+\beta)}}$ $\leftarrow$ $a = c(1-e^{i\alpha})$, $b = d(1-e^{i\beta})$

$\rho_{d,\beta} \circ \rho_{c,\alpha}$ est une translation si $\alpha+\beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, de par $a e^{i\beta} + b$

Analoguement, ~~$\tau_b \circ f(z) = (e^{i\alpha} z + a)$~~

- $\tau_b \circ \rho_{c,\alpha}$ est une rotation d'angle $\alpha$ et centre $a+b = c(1-e^{i\alpha}) + b$.

- $\rho_{d,\beta} \circ \tau_a$ est une rotation d'angle $\beta$ et centre $a e^{i\beta} + b = a e^{i\beta} + d(1-e^{i\beta})$

- $\forall c \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\rho_{c,\alpha}$ est bijective, de bijection réciproque $\rho_{c,-\alpha} = (\rho_{c,\alpha})^{-1}$

Homothéties : (Transformations hyperboliques)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ ($\lambda > 0$), $M$ un point du plan. L'homothétie de centre $M$ et rapport $\lambda$ est la transformation qui envoie $P$ sur l'unique $Q$ t.q. $\vec{MQ} = \lambda \vec{MP}$.

Si $c \in \mathbb{C}$ est l'affixe de M, l'homothétie correspond à

$h_{c,\lambda} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. $z \mapsto \lambda(z-c)+c = \lambda z + (1-\lambda)c$.

- Si $\lambda \neq 1$, $\mathrm{Fix}(h_{c,\lambda}) = \{c\}$, Si $\lambda = 1$, $h_{c,\lambda} = id_{\mathbb{C}}$, $\mathrm{Fix}(h_{c,1}) = \mathbb{C}$.

$(0, \vec{i}, \vec{j})$ est envoyé sur $(P, \lambda \cdot \vec{i}, \lambda \vec{j})$ où P est le point d'affixe $(1-\lambda)c$.

Si $g(z) = \lambda z + a$ ($\lambda \neq 1$) $\Rightarrow$ g décrit l'homothétie de centre $\frac{a}{1-\lambda}$ et rapport $\lambda$.

$f(z) = \lambda z + a$ $\quad g(z) = \mu z + b$

$g \circ f(z) = \mu \lambda z + \mu a + b$.

$\Rightarrow$ Si $\lambda\mu = 1 \Rightarrow h_{\mu,d} \circ h_{\lambda,c}$ est une translation.

Si $\lambda\mu \neq 1 \Rightarrow h_{\mu,d} \circ h_{\lambda,c}$ est une homothétie de rapport $\lambda\mu$.

$\tau_b \circ h_{\lambda,c}$, $h_{\lambda,c} \circ \tau_b$ sont homothéties de rapport $\lambda$.

- $h_{c,\lambda}^{-1} = h_{c,\frac{1}{\lambda}}$.